

فصل ۲

سیستم‌های ستاره‌ای

۱.۲ روشنایی سطحی

دو تعریف از روشنایی سطحی در ادبیات نجوم به کار می‌رود. توان تابشی را در نظر بگیرید که وارد یک تلسکوپ می‌شود به مساحت دهانه‌ی dA عمود بر راستای تابش در زاویه‌ی فضایی $d^2\Omega$ که توزیع چگالی درخشندگی $j(r)$ دارد. مبداء مختصات را در مرکز دهانه‌ی تلسکوپ فرض می‌کنیم. حجمی که در فاصله‌ی $(r, r+dr)$ درون زاویه‌ی فضایی قرار می‌گیرد $r^2 dr d^2\Omega$ است، و درخشندگی مرتبط با این حجم $dL = j(r) R^2 dr d^2\Omega$ است. کسر $dA/(4\pi r^2)$ از این درخشندگی وارد تلسکوپ می‌شود، بنابراین توان دریافت شده در بازه فاصله‌ی dr و تحت زاویه‌ی فضایی هست $j(r)/(4\pi) dr d^2\Omega dA$. با جمع زدن روی تمام فواصل و تقسیم کردن بر $d^2\Omega dA$ شار در واحد زاویه‌ی فضایی هست

$$\hat{I} = \frac{1}{4\pi} \int dr j(r) \quad (1.2)$$

روشنایی سطحی \hat{I} با واحد $W m^{-2} sr^{-1}$ بیان می‌شود. تعریف دوم از روشنایی سطحی انتگرال زیر است

$$I = \int dr j(r) \quad (2.2)$$

I درخشندگی کهکشان در واحد سطح در راستای مشخص است و معمولاً بر حسب درخشندگی خورشید بر پارسک مربع بیان می‌شود. روشنایی سطحی اغلب بر حسب قدر بر مربع ثانیه قوسی توسط ناظر گزارش می‌شود. مثلاً 20 mag/arcsec^2 ، یعنی یک ثانیه قوسی مربع از تصویر به اندازه درخشندگی یک ستاره با قدر ۲۰ است. در اغلب کتاب‌ها از تعریف دوم روشنایی سطحی استفاده می‌کنند.

۲.۲ قضیه‌ی ویریال

قبل از این که وارد دینامیک ستاره‌ای شویم بهتر است از یک اصل اساسی به نام قضیه‌ی ویریال آغاز نماییم. این قضیه بیان می‌دارد که برای هر سیستمی از ذرات که توسط یک نیروی عکس مجذوری مقید شده باشند، متوسط زمانی انرژی جنبشی $\langle T \rangle$ و متوسط زمانی انرژی پتانسیل $\langle U \rangle$ در حالت تعادل در این رابطه صدق می‌کنند

$$2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0 \quad (3.2)$$

کمیت $\langle T \rangle$ مقدار مثبت بسیار بزرگی خواهد بود و $\langle U \rangle$ یک مقدار منفی بسیار بزرگ خواهد بود. البته برای این که یک کهکشان پایدار و مقید باقی بماند، انرژی کل باید $\langle T \rangle + \langle U \rangle < 0$ باشد؛ قضیه‌ی ویریال قید محکم‌تری ایجاد می‌کند. مثلاً برای کهکشان‌ها $\langle T \rangle$ و $\langle U \rangle \sim 10^{50}$ تا $10^{54} J$ است.

در عمل، سیستم‌های متعدد ستاره‌ای کاملاً در حالت پایایی^۱ نهایی نیستند و قضیه‌ی ویریاال دقیقاً به کار برده نمی‌شود. علی‌رغم این مسأله، این قضیه نتایج تقریبی مهمی برای سیستم‌های متعدد نجومی بدست می‌دهد. قضیه‌ی ویریاال اولین بار توسط کلاسیوس^۲ برای توصیف حرکت ذرات در ترمودینامیک ارائه شد. کلمه‌ی virial از کلمه‌ی لاتین vis برای نیرو می‌آید.

۱.۲.۲ تخمین جرم با استفاده از قضیه‌ی ویریاال

یک کهکشان بیضوی‌گون به صورت کروی که شعاع R دارد را در نظر بگیرید که توزیع چگالی یکنواخت داشته و شامل N ستاره هر یک به جرم m و سرعت v است. از قضیه‌ی ویریاال داریم

$$2\langle T \rangle + \langle U \rangle = 0$$

که داریم

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} N m v^2$$

همچنین با متوسط‌گیری روی زمان، داریم $\langle T \rangle = \frac{1}{2} N m v^2$. انرژی پتانسیل گرانشی یک کره‌ی یکنواخت به جرم M و شعاع R هست

$$U = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

بنابراین متوسط زمانی انرژی پتانسیل کهکشان هست

$$\langle U \rangle = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

که M جرم کل است. با جای‌گذاری این رابطه در معادله‌ی قضیه‌ی ویریاال داریم

$$2 \left(\frac{1}{2} N m v^2 \right) - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = 0$$

اما جرم کل هست $M = Nm$. پس

$$v^2 = \frac{3}{5} \frac{NGm}{R} = \frac{3}{5} \frac{GM}{R}$$

این محاسبه فقط یک تخمین است، بنابراین از این تقریب استفاده می‌کنیم

$$v^2 \simeq \frac{NGm}{R} \simeq \frac{GM}{R} \quad (4.2)$$

تخمین جرم خواهد بود

$$M \simeq \frac{v^2 R}{G} \quad (5.2)$$

بنابراین یک کهکشان بیضوی که سرعت معمول $v = 350 \text{ km s}^{-1} = 3.5 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ و شعاع $R = 10 \text{ kpc}$ دارد، جرمی حدود $3.1 \times 10^{11} M_{\odot}$ دارد، جرمی حدود $6 \times 10^{41} \text{ kg} \sim 3 \times 10^{11} M_{\odot}$ دارد.

^۱Steady State

^۲Rudolf Clausius

۲.۲.۲ مثال: کهکشان‌های بیضوی

می‌توانیم رابطه‌ای بین مقیاس اندازه‌ی کهکشان، روشنایی سطحی مرکزی و سرعت پخشی مرکزی برای کهکشان‌های بیضوی بدست آوریم که در آن فقط با استفاده از فرض‌های نسبت جرم به درخشندگی ثابت و شکل تابعی ثابت برای پروفایل روشنایی سطحی ثابت بدست می‌آوریم. فرض‌هایی که داریم:

• نسبت جرم به درخشندگی^۲ برای بیضوی‌گون‌ها ثابت است.

• کهکشان‌های بیضوی شکل تابعی یکسانی برای توزیع جرم دارند.

فرض کنیم I_0 روشنایی سطحی مرکزی و R_0 اندازه‌ی مقیاس یک کهکشان باشد (در این حالت، کهکشان‌های مختلف مقادیر متفاوتی برای I_0 و R_0 دارند). درخشندگی کل کهکشان می‌شود

$$L \propto I_0 R_0^2$$

I_0 نور در واحد مساحت تصویر شده است. چون نسبت جرم به درخشندگی برای همه‌ی کهکشان‌ها ثابت است، جرم کهکشان می‌شود $M \propto L$

$$M \propto I_0 R_0^2$$

از قضیه‌ی ویرال می‌دانیم که اگر v سرعت معمول ستاره‌ها در کهکشان باشد

$$v^2 \simeq \frac{GM}{R_0}$$

سرعت پخشی مشاهده شده در راستای خط دید، σ_0 ، به سرعت ستاره‌ها v به صورت $\sigma_0 \propto v$ مربوط است (چون v سرعت فضایی سه بعدی است). بنابراین

$$\sigma_0^2 \propto \frac{M}{R_0}, \quad M \propto \sigma_0^2 R_0$$

با برابر قرار دادن این رابطه با $M \propto I_0 R_0^2$ داریم

$$R_0 I_0 \sigma_0^{-2} \simeq constant$$

این رابطه به نتیجه‌ی بدست آمده از مشاهدات یعنی $R_0 I_0^{1/4} \sigma_0^{-1/2} \simeq constant$ نزدیک است. این انحراف از پیش‌بینی قضیه‌ی ویرال احتمالاً مربوط به نسبت جرم به درخشندگی متغیر باشد که ناشی از تفاوت سن کهکشان‌ها باشد.

۳.۲ زمان عبور

زمان عبور^۴ یک پارامتر ساده اما مهم است که مقیاس زمانی حرکت بارز ستاره‌ها درون سیستم‌های ستاره‌ای را می‌سنجد. گاهی این زمان، مقیاس زمان دینامیکی نیز نامیده می‌شود. این زمان عبور به این شکل تعریف می‌شود

$$T_{cross} \equiv \frac{R}{v} \quad (۶.۲)$$

در این جا R اندازه‌ی سیستم است و v سرعت نوعی ستاره‌هاست. به عنوان یک مثال ساده، یک سیستم ستاره‌ای داریم به شعاع R (و اندازه‌ی کل $2R$) که شامل N ستاره هر یک به جرم m است؛ که ستاره‌ها تقریباً همگن توزیع شده‌اند و سرعت v دارند. همچنین این سیستم در حال تعادل دینامیکی است. از

^۲Mass-to-light ratio

^۴Crossing time

قضیه‌ی ویربال،

$$v^2 \simeq \frac{NGm}{R}$$

زمان عبور می‌شود

$$T_{cross} \equiv \frac{2R}{v} \simeq \frac{2R}{\sqrt{\frac{NGm}{R}}} \simeq 2\sqrt{\frac{R^3}{NGm}} \quad (۷.۲)$$

اما چگالی جرمی هست

$$\rho = \frac{Nm}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Nm}{4\pi R^3}$$

$$T_{cross} = 2\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}$$

بنابراین به طور تقریبی زمان عبور می‌شود

$$T_{cross} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad (۸.۲)$$

اگرچه این معادله برای یک مورد خاص که توزیع همگن کروی دارد بدست آمده، اما یک نتیجه‌ی مهم است و می‌تواند برای تخمین مرتبه‌ی بزرگی در حالت‌های دیگر استفاده شود. (توجه نمایید که در این جا ρ چگالی جرمی کل سیستم است که روی کل فضا متوسط‌گیری شده و نه چگالی هر یک از ستاره‌ها).
به عنوان یک مثال، کهکشانی بیضوی با 10^{11} ستاره که شعاع 10 kpc دارد را تصور کنیم

$$R \simeq 10 \text{ kpc} \simeq 3.1 \times 10^20 \text{ m}$$

$$N = 10^{11}$$

$$m \simeq 1 M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

زمان عبور می‌شود

$$T_{cross} \simeq 2\sqrt{\frac{R^3}{NGm}} \rightarrow T_{cross} \simeq 10^{15} \text{ s} \simeq 10^8 \text{ yr}$$

سن کیهان حدود $14 \times 10^9 \text{ yr}$ است. بنابراین اگر کهکشانی سنی حدود 14 Gyr داشته باشد، تنها حدود چند صد زمان عبور طی عمر کهکشان تاکنون بوده است.

۴.۲ زمان واهلش

زمان واهلش^۵ در واقع زمانی است که طول می‌کشد تا سرعت ستاره v به طور قابل توجهی در برهم‌کنش دو ذره‌ای تغییر کند. تعریف می‌کنیم که زمان لازم برای تغییر Δv^2 مشابه v^2 شود؛ یعنی زمان لازم برای

$$\Delta v^2 = v^2 \quad (۹.۲)$$

برای تخمین زمان واهلش نیاز است تا ماهیت برخوردهای بین ستاره‌ها را با جزئیات بدانیم.

^۵Relaxation time

۵.۲ برخوردهای ستاره - ستاره

۱.۵.۲ انواع برخوردها

می‌توان انتظار داشت که با حرکت ستاره‌ها درون کهکشان یا دیگر سیستم‌های ستاره‌ای (مانند خوشه‌ها)، برخورد نزدیک با دیگر ستاره‌ها را تجربه کنند. اثرات گرانشی یک ستاره روی ستاره‌های دیگر سرعت‌های ستاره‌ها را تغییر می‌دهد و این اختلال‌های سرعت اثر عمیقی روی دینامیک کل کهکشان دارد. دینامیک کهکشان می‌تواند تنها در نتیجه‌ی برخوردهای درونی بین ستاره‌ها با زمان تحول یابد. البته واقعیت کمی متفاوت است. برخوردهای نزدیک ستاره - ستاره در واقع بسیار نادر هستند و حتی اثرات برخوردهای دور نیز بسیار کم است و زمان طولانی باید سپری شود تا دینامیک کهکشان را کمی تغییر دهد. برخوردهای ستاره - ستاره را می‌توان به دو نوع متفاوت تقسیم کرد:

- برخوردهای قوی - یک برخورد نزدیک که سرعت ستاره را به شدت تغییر می‌دهد. این برخوردها در عمل بسیار نادر هستند.
- برخوردهای ضعیف - در فواصل دور رخ می‌دهند. این برخوردها تغییرات بسیار کوچکی در سرعت ستاره ایجاد می‌کنند، اما متداول و پر تعداد هستند.

۲.۵.۲ برخوردهای قوی

یک برخورد قوی بین دو ستاره به این صورت تعریف می‌شود که یک برخورد قوی داریم اگر، در نزدیک‌ترین فاصله‌ی عبور ستاره، تغییر در انرژی پتانسیل بزرگ‌تر یا مساوی انرژی جنبشی اولیه باشد. برای دو ستاره به جرم m که به نزدیک‌ترین فاصله‌ی r_0 می‌رسند، اگر تغییر در انرژی پتانسیل بزرگ‌تر از انرژی جنبشی اولیه باشد

$$\frac{Gm^2}{r_0} \geq \frac{1}{2}mv^2$$

که v سرعت اولیه‌ی یک ستاره نسبت به ستاره‌ی دیگر است.

$$r_0 \leq \frac{2Gm}{v^2}$$

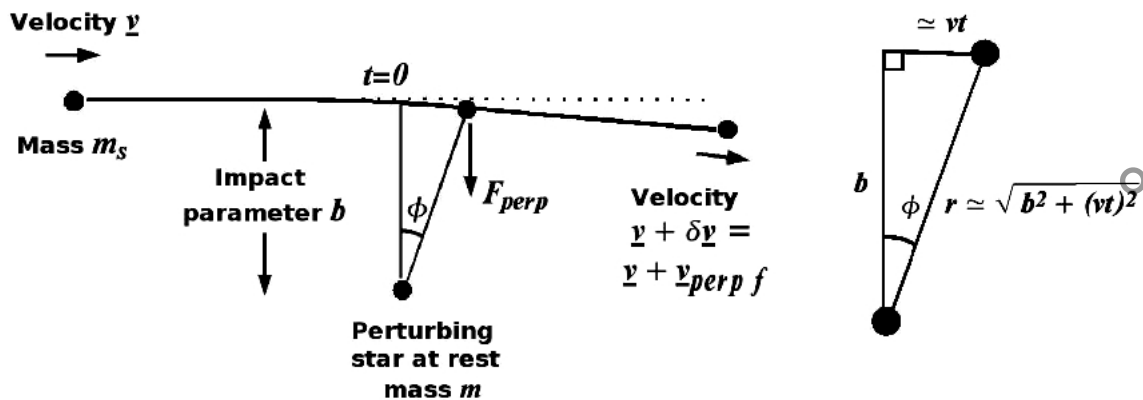
بنابراین شعاع برخورد قوی را تعریف می‌کنیم

$$r_S \equiv \frac{2Gm}{v^2} \quad (10.2)$$

یک برخورد قوی رخ خواهد داد اگر دو ستاره به فاصله‌ی $r_S \equiv 2Gm/v^2$ از هم برسند. برای یک کهکشان بیضوی که سرعت $v \simeq 300 \text{ km s}^{-1}$ است و $m = 1M_\odot$ ، شعاع برخورد قوی می‌شود $r_S \simeq 0.02 \text{ AU} \simeq 3 \times 10^9 \text{ m}$. این فاصله در مقیاس یک کهکشان بسیار کوچک است. فواصل معمول بین ستاره‌ها در یک کهکشان حدود $1 \text{ pc} \simeq 200000 \text{ AU}$ است.

برای ستاره‌ها در صفحه‌ی کهکشانی در همسایگی خورشید، یک سرعت پخشی به اندازه‌ی $v = 30 \text{ km s}^{-1}$ و $m = 1M_\odot$ می‌توانیم به کار گیریم. این مقادیر نتیجه می‌دهد $r_S \simeq 3 \times 10^{11} \text{ m} \simeq 2 \text{ AU}$. باز هم این فاصله در مقیاس کهکشان بسیار کوچک است.

بنابراین برخوردهای قوی بسیار نادر هستند. زمان متوسط بین برخوردهای قوی در صفحه‌ی کهکشان 10^{15} yr است، در حالی که سن کهکشان حدود $13 \times 10^9 \text{ yr}$ است. در عمل می‌توان از اثر برخوردهای قوی در دینامیک ستاره‌ها چشم‌پوشی کرد.



شکل ۱۰۲: برخورد ضعیف دو ستاره

۳.۵.۲ برخوردهای ضعیف در فاصله‌ی دور بین ستاره‌ها

یک ستاره برخورد ضعیف را تجربه می‌کند اگر به حداقل فاصله r_0 به ستاره دیگر برسد وقتی که

$$r_0 > r_S \equiv \frac{2Gm}{v^2} \quad (11.2)$$

که v سرعت نسبی قبل از برخورد و m جرم ستاره‌ی عامل اختلال است. برخوردهای ضعیف در حالت کلی تنها یک اختلال کوچک در حرکت ستاره‌ها درون یک سیستم ستاره‌ای تولید می‌کنند، اما این برخوردها بسیار پر تعدادتر از برخوردهای قوی هستند و مهم‌ترند.

حال می‌خواهیم رابطه‌ی بدست آوریم که تغییرات سرعت δv را طی یک برخورد ضعیف بیان نماید. این نتیجه را بعدتر برای بدست آوردن عبارتی برای مربع تغییرات سرعت به واسطه‌ی تعداد زیادی از برخوردهای ضعیف استفاده خواهیم کرد که برای بدست آوردن یک تخمین برای زمان واهلش در سیستم‌های ستاره‌ای به کار خواهیم بست. ستاره‌ای به جرم m_s را در نظر بگیرید که به یک ستاره‌ی مختل کننده به جرم m و پارامتر برخورد b نزدیک می‌شود. از آنجا که برخورد ضعیف است، تغییر در جهت حرکت کوچک خواهد بود و تغییر در سرعت بر راستای اولیه‌ی حرکت عمود خواهد بود. در زمان دلخواه t که فاصله r است، مؤلفه‌ی نیروی گرانشی عمود بر جهت حرکت خواهد بود

$$F_{prep} = \frac{Gm_s m}{r^2} \cos \phi$$

که ϕ زاویه بین نقطه‌ی نزدیک‌ترین فاصله و راستای حرکت ستاره‌ی مختل شده است. مؤلفه‌ی عمودی سرعت نسبت به جهت اولیه‌ی حرکت v_{prep} و مقدار نهایی $v_{prep,f}$ است.

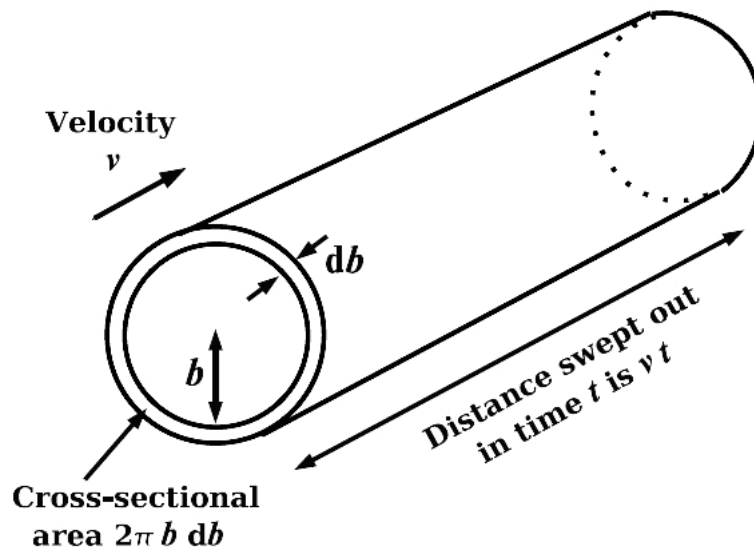
از این تقریب استفاده می‌کنیم که سرعت در امتداد مسیر تقریباً ثابت است بنابراین اگر $t = 0$ لحظه‌ای باشد که ستاره در نزدیک‌ترین فاصله قرار دارد در زمان t داریم $r \simeq \sqrt{b^2 + v^2 t^2}$. با استفاده از این که $\cos \phi = b/r \simeq b/\sqrt{b^2 + v^2 t^2}$ و قانون دوم نیوتن $F = ma = mdv/dt$ بر راستای عمود بر جهت حرکت بدست می‌آوریم

$$\frac{dv_{prep}}{dt} = \frac{Gmb}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}}$$

که v_{prep} مؤلفه‌ی عمود سرعت به راستای اولیه‌ی حرکت در زمان دلخواه t است. با انتگرال‌گیری روی زمان از $t = -\infty$ تا $t = +\infty$ (از قبل از نزدیک‌ترین فاصله برخورد تا بعد از آن) داریم

$$[v_{prep}]_0^{v_{prep,f}} = Gmb \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}}$$

با استفاده از انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + s^2)^{-3/2} ds = 2$ که با تغییر متغیر $s = \tan x$ مؤلفه‌ی نهایی سرعت عمود بر راستای



شکل ۲.۰۲: برخوردهای متعدد ضعیف دو ستاره

اولیه‌ی حرکت بدست می‌آید

$$v_{prep,f} = \frac{2Gm}{bv} \quad (12.2)$$

از آن‌جا که انحراف از راستای اولیه کوچک است، تغییر سرعت می‌شود $v_{prep,f} \equiv |\delta v| = \delta v$. بنابراین تغییر در سرعت v با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$\delta v = \frac{2Gm}{bv} \quad (13.2)$$

که G ثابت گرانش، b پارامتر برخورد و m جرم ستاره‌ی مختل کننده است. با حرکت ستاره در میان فضا، اختلال‌های متعددی را به واسطه‌ی برخوردهای ضعیف تجربه می‌کند. تعدادی از این تغییر سرعت‌ها یکدیگر را حذف می‌کنند، اما مقدار تغییر سرعت خالصی طی زمان باقی خواهد ماند. در نتیجه، جمع روی تمام δv ها مقداری کوچک خواهد بود اما جمع روی مربع‌های δv^2 با زمان رشد می‌کند. در تعریف زمان واهلش لازم است که تغییر در v^2 را مورد توجه قرار دهیم. از آن‌جا که تغییر در سرعت δv بر سرعت اولیه v در یک برخورد ضعیف عمود است، تغییر در v^2 می‌شود

$$\delta v^2 \equiv v_f^2 - v^2 = |\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}|^2 - v^2 = (\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} - v^2 = 2\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + (\delta v)^2 = (\delta v)^2$$

که v_f سرعت نهایی ستاره است. برای بررسی تغییر در v^2 که از یک تک برخورد ناشی می‌شود باید به این رابطه توجه نماییم

$$\delta v^2 = \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \quad (14.2)$$

حال تمام برخوردهای ضعیف که طی یک دوره زمانی t در بازه‌ی b تا $b + db$ رخ می‌دهند و درون یک سیستم کروی با توزیع یکنواخت که شامل N ستاره است و شعاع R دارد را می‌خواهیم مورد توجه قرار دهیم. حجم جاروب شده بین پارامترهای برخورد b و $b + db$ در زمان t هست $2\pi b db vt$. بنابراین تعداد برخوردهای ستاره‌ای بین b و $b + db$ در زمان t می‌شود

$$(\text{حجم جاروب شده}) \times (\text{چگالی تعداد ستاره‌ها}) = (2\pi b db vt) \frac{N}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{3bvtNdb}{2R^3}$$

تغییر کل در v^2 که توسط تمام برخوردهای ضعیف طی زمان t با پارامترهای برخورد در بازه‌ی b تا $b + db$ می‌شود

$$\Delta v^2 = \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \left(\frac{2bvtNdb}{2R^2} \right)$$

با انتگرال‌گیری روی b ، تغییر کل سرعت در زمان t بین پارامتر برخورد b_{min} تا b_{max} هست

$$\Delta v^2(t) = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \left(\frac{2Gm}{bv} \right)^2 \left(\frac{2bvtNdb}{2R^2} \right) = \frac{2}{v} \left(\frac{2Gm}{v} \right)^2 \frac{vtN}{R^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b}$$

$$\Delta v^2(t) = \frac{2}{v} \left(\frac{Gm}{v} \right)^2 \frac{vtN}{R^2} \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \quad (15.2)$$

تغییر در سرعت v^2 را می‌توان برای یک زمان عبور نیز بدست آورد. در یک زمان عبور $T_{cross} = 2R/v$ تغییر در v^2 خواهد بود

$$\begin{aligned} \Delta v^2(T_{cross}) &= \frac{2}{v} \left(\frac{Gm}{v} \right)^2 \frac{v}{R^2} \left(\frac{2R}{v} \right) N \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \\ &= 4N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \end{aligned} \quad (16.2)$$

بیشترین ابعادی که برخورد ضعیف می‌تواند رخ دهد برابر با ابعاد کل سیستم ستاره‌ای است. بنابراین باید قرار دهیم $b_{max} \simeq R$

$$\Delta v^2(T_{cross}) = 4N \left(\frac{Gm}{Rv} \right)^2 \ln \left(\frac{R}{b_{min}} \right) \quad (17.2)$$

برای بدست آوردن زمان واهلش T_{relax} که طبق تعریف زمانی است که طول می‌کشد $v^2 = \Delta v^2$ شود. با جای‌گذاری Δv^2 از معادله‌ی ۱۵.۲ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{2}{v} \left(\frac{Gm}{v} \right)^2 \frac{vT_{relax}N}{R^2} \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right) &= v^2 \\ T_{relax} &= \frac{1}{4N \ln \left(\frac{b_{max}}{b_{min}} \right)} \frac{(Rv)^2}{(Gm)^2} \end{aligned} \quad (18.2)$$

با قرار دادن $b_{max} \simeq R$ داریم

$$T_{relax} = \frac{1}{4N \ln \left(\frac{R}{b_{min}} \right)} \frac{(Rv)^2}{(Gm)^2} \quad (19.2)$$

معادله‌ی ۱۹.۲ به ما امکان می‌دهد تا زمان واهلش را برای سیستم ستاره‌ها، از قبیل کهکشان یا خوشه‌های کروی تخمین بزنیم. روش‌های مختلف بدست آوردن زمان واهلش ممکن است ضرایب عددی متفاوت داشته باشند چرا که فرض‌های مختلفی دارند.

در عمل، اغلب برای b_{min} مقیاسی را انتخاب می‌کنند که برخورد قوی در آن رخ می‌دهد، $b_{min} \simeq 1AU$. مقادیر دقیق‌تر برای b_{min} و b_{max} به دلیل وابستگی لگاریتمی اثر کمی در تخمین زمان واهلش دارند.

به عنوان مثال‌هایی از تخمین زمان واهلش، یک کهکشان بیضوی را تصور نمایید که: $N \simeq 300kms^{-1}$ ، $v \simeq$

در حالی که $R \simeq 10 \text{ kpc}$ ، 10^{11} دارد و $m \simeq 1 M_{\odot}$. بنابراین $\ln(R/b_{min}) \simeq 21$ و $T_{relax} \sim 10^{24} \text{ s} \sim 10^{16} \text{ yr}$ و $10^9 \text{ yr} \times 14$ سن دارد، یعنی زمان واهلش حدود 10^8 برابر سن کیهان است. بنابراین برخوردهای ستاره-ستاره در کهکشان‌ها اثر بارزی ندارند.

اما یک خوشه‌ی ستاره‌ای کروی را تصور نمایید که: $m \simeq 1 M_{\odot}$ ، $R \simeq 5 \text{ pc}$ ، $N \simeq 5 \times 10^5$ ، $v \simeq 10 \text{ kms}^{-1}$ دارد. بنابراین $\ln(R/b_{min}) \simeq 15$ و $T_{relax} \sim 10^7 \text{ yr}$ می‌شود. این عدد در حدود یک هزارم سن کهکشان است. بنابراین برهم‌کنش‌های دو جسمی در خوشه‌های کروی اثر قابل توجهی دارند. اهمیت محاسبه‌ی زمان واهلش در این است که ما را قادر می‌سازد در مدل‌سازی برای دینامیک سیستم‌های ستاره‌ای تصمیم بگیریم که آیا برهم‌کنش ستاره-ستاره نیز داشته باشیم یا خیر.

۶.۲ نسبت زمان واهلش به زمان عبور

می‌توان یک عبارت تقریبی برای نسبت زمان واهلش به زمان عبور به سادگی بدست آورد. با تقسیم کردن عبارات‌های مربوط به زمان واهلش و زمان عبور داریم

$$\frac{T_{relax}}{T_{cross}} = \frac{1}{12 N \ln\left(\frac{R}{b_{min}}\right)} \frac{R^2 v^4}{(Gm)^2}$$

برای یک کره‌ی یکنواخت، از قضیه‌ی ویربال داریم

$$v^2 \simeq \frac{NGm}{R}$$

اگر برای b_{min} شعاع برخورد قوی $r_S = 2GM/v^2$ قرار دهیم، بدست می‌آوریم

$$\frac{T_{relax}}{T_{cross}} = \frac{1}{12 N \ln\left(\frac{Rv^2}{r_S GM}\right)} \frac{R^2 v^4}{(Gm)^2} \simeq \frac{N^2}{12 N \ln(N)} \quad (20.2)$$

$$\frac{T_{relax}}{T_{cross}} \simeq \frac{N}{12 \ln N}$$

برای یک کهکشان $N \sim 10^{11}$ است. بنابراین $T_{relax}/T_{cross} \sim 10^9$. برای یک خوشه‌ی کروی داریم $N \sim 10^5$ و داریم $T_{relax}/T_{cross} \sim 10^2$.

۷.۲ سیستم‌های برخوردی و غیر برخوردی

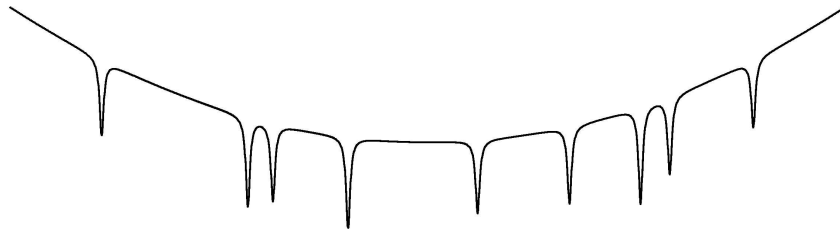
می‌توان سیستم‌های دینامیکی اجرام را بر حسب این که برهم‌کنش تک به تک ذرات در این سیستم‌ها مهم هست یا نیست دسته‌بندی کرد. چنین سیستم‌هایی برخوردی یا غیر برخوردی نامیده می‌شوند. دینامیک این سیستم‌ها بدین گونه است:

برخوردی اگر برهم‌کنش بین ذرات منفرد سیستم به طور مؤثر روی حرکت ذرات تأثیر بگذارد.

غیر برخوردی اگر برهم‌کنش بین ذرات سیستم روی حرکت ذرات بطور محسوس تأثیر نگذارد.

محاسبه زمان واهلش نشان داد کهکشان‌ها بطور عام سیستم‌های غیر برخوردی هستند (البته به جز بخش هسته‌ی کهکشان‌ها که چگالی ستاره‌ای خیلی زیاد است). اما خوشه‌های کروی ستاره‌ای در طی عمر عالم برخوردی محسوب می‌شوند. گازها چه درون کهکشان باشند یا در آزمایش‌گاه، برخوردی هستند.

مدل‌سازی برای سیستم‌های دینامیکی اگر غیر برخوردی باشند بسیار ساده‌تر است. خوش‌بختانه می‌توانیم از برخوردهای ستاره-ستاره در مدل‌سازی کهکشان‌ها صرف‌نظر نماییم و این امر به ما اجازه استفاده از معادله‌ی بدون برخورد بولتزمان را می‌دهد.



شکل ۳.۲: پتانسیل کهکشان از دو بخش هموار ناشی از کل محتوای کهکشان و یک بخش ناهموار موضعی ناشی از تک تک ستاره‌ها تشکیل یافته است.

۸.۲ واهلش شدید^۶

ستاره‌های درون کهکشان‌ها سیستم‌های غیر برخوردار هستند. بنابراین ستاره‌ها در یک کهکشان حالت پایا بدون اختلال بر یکدیگر به مسیر خود ادامه می‌دهند. توزیع متوسط ستاره‌ها طی زمان تغییر نخواهد کرد. اما در سیستم‌های غیر تعادلی وضع به شکل دیگری است. تغییر پتانسیل گرانشی موجب تغییر در مدار ستاره‌ها می‌شود. از طرفی ستاره‌ها پتانسیل کلی را تعیین می‌کنند، و تغییر در مدارهای ستاره‌ای پتانسیل را تغییر خواهد داد. فرآیند تغییر در دینامیک ستاره‌ها که بواسطه تغییر در پتانسیل خالصشان ایجاد شده واهلش شدید گفته می‌شود. کهکشان‌ها در ابتدای شکل‌گیری‌شان چنین واهلش شدیدی را تجربه کرده‌اند و این فرآیند آن‌ها را به حالت تعادل امروزی رسانده است. برهم‌کنش بین کهکشان‌ها نیز می‌تواند موجب واهلش شدید شود. چنین اتفاقی تقریباً سریع (حدود $10^8 yr$) رخ می‌دهد و حرکت ستارگان را باز توزیع می‌نماید.

۹.۲ ماهیت پتانسیل گرانشی در یک کهکشان

۹.۲. ماهیت پتانسیل گرانشی در یک کهکشان

پتانسیل گرانشی درون یک کهکشان را لزوماً می‌توان به صورت دو مؤلفه نمایش داد. اولین مؤلفه عریض، هموار و پتانسیل زیربنایی ناشی از کل کهکشان است. این پتانسیل جمع پتانسیل‌های همه‌ی ستاره‌ها به اضافه ماده تاریک و محیط میان‌ستاره‌ای است. مؤلفه‌ی دوم پتانسیل‌های به دلیل ستارگان منفرد بطور موضعی عمیق‌تر است. می‌توانیم پتانسیل را به طور مؤثر به صورت یک مؤلفه‌ی هموار با پتانسیل‌های موضعی عمیق‌تر که به آن اضافه شده‌اند در نظر بگیریم. برهم‌کنش‌های بین ستارگان بسیار نادر است، و بنابراین بخش عریض پتانسیل است که حرکت ستاره‌ها را مشخص می‌کند. بنابراین، می‌توانیم دینامیک یک سیستم از ستارگان را تنها با استفاده از مؤلفه‌ی هموار پتانسیل گرانشی $\Phi(x, t)$ مشخص نماییم. اگر کهکشان به حالت پایا رسیده باشد پتانسیل تنها تابعی از مکان $\Phi(x)$ خواهد بود.

۱.۹.۲ انواع پتانسیل کروی

- مدل‌های دهنن^۷

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^\alpha \left(1 + \frac{r}{a}\right)^{4-\alpha}} \quad (21.2)$$

- مدل Jaffe

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2} \quad (22.2)$$

^۶Violent Relaxation

^۷Dehnen models

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{r}{a}\right)^4} \quad (23.2)$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{r}{a}\right)^{5/2}} \quad (24.2)$$

• مدل Hernquist

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right)^3} \quad (25.2)$$

۲.۹.۲ پتانسیل‌های با تقارن محوری

• پتانسیل Miyamoto

$$\Phi_M(R, z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}} \quad (26.2)$$

$$\rho_M(R, z) = \left(\frac{b^2 M}{4\pi}\right) \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2]^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}} \quad (27.2)$$

۱۰.۲ فضای فاز و تابع توزیع

۱۰.۲. فضای فاز و تابع توزیع

در ریاضیات و فیزیک، فضای فاز یک سیستم دینامیکی فضایی است که تمام حالت‌های ممکن یک سیستم در آن نمایش داده می‌شود، که هر حالت سیستم متناظر با یک نقطه در فضای فاز است. برای سیستم‌های مکانیکی، فضای فاز معمولاً شامل تمام مقادیر ممکن مکان و تکانه‌ی سیستم است. مفهوم فضای فاز در قرن نوزدهم میلادی توسط بولتزمن^۸، پوانکاره^۹ و گیبس^{۱۰} توسعه یافت.

برای توصیف دینامیک یک کهکشان می‌توان از این‌ها استفاده کرد:

• مکان هر ستاره X_i

• سرعت‌های هر ستاره V_i

که $i = 1$ تا $10^{12} - 10^6 \sim N$ است. اما واضح است که چنین روشی غیر عملی است. اگر سعی کنیم داده‌های مکان و سرعت سیستمی با این تعداد ذره را روی یک رایانه با اعداد ۴ بایتی ذخیره کنیم برای هر ستاره در یک کهکشان با حدود $10^{12} \sim N$ ستاره، نیاز به حدود $20000 \text{ Gbytes} \sim 6 \times 4 \times 10^{12} \text{ bytes}$ خواهیم داشت. چنین داده‌ی عظیمی با محدودیت ذخیره‌سازی مواجه است. اگر بخواهیم یک کهکشان را شبیه‌سازی نماییم، نیاز داریم تحول کهکشان را طی زمان با استفاده از گام‌های زمانی بسیار زیاد بررسی نماییم. ذخیره‌سازی یک مجموعه کامل از مثلاً $10^6 - 10^3$ گام زمانی غیر ممکن خواهد بود. از نظر درصدی نیز در عین حال ثبت کردن مکان و سرعت‌های هر ستاره در یک کهکشان غیر ممکن است.

^۸Ludwig Boltzmann (1844-1906)

^۹Henri Poincaré (1854-1912)

^{۱۰}Willard Gibbs (1839-1903)

تعداد ستاره‌های درون یک جعبه به اضلاع بین $x, x + dx, y, y + dy, z, z + dz$ که سرعت‌هایشان در بازه‌های $v_x, v_x + dv_x, v_y, v_y + dv_y, v_z, v_z + dv_z$ برابر است با

$$f(x, v, t) dx dy dz dv_x dv_y dv_z \equiv f(x, v, t) d^r x d^r v$$

چگالی تعداد ستاره‌ها $n(x, v, t)$ در فضا را می‌توان از روی تابع توزیع $f(x, v, t)$ با انتگرال‌گیری روی مؤلفه‌های سرعت بدست آورد

$$n(x, v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) dv_x dv_y dv_z = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) d^r v \quad (28.2)$$

۱۱.۲ قضیه‌ی لیوویل و معادله‌ی پیوستگی

۱۱.۲. قضیه‌ی لیوویل و معادله‌ی پیوستگی

می‌توانیم فرض نماییم ستاره‌های یک کهکشان پایسته هستند، یعنی تعداد ستاره‌ها تغییر نمی‌کند. در واقع از مرگ و تولد ستاره‌ها فعلاً صرف‌نظر می‌نماییم. فرض ثابت بودن تعداد ستاره‌ها منجر به معادله‌ی پیوستگی خواهد شد. این معادله بیان می‌کند که نرخ تغییر در تابع توزیع f به عنوان تابعی از زمان به نرخ تغییر با مکان و سرعت. این معادله نقطه‌ی آغاز مهمی در بدست آوردن دیگر روابطی که تابع توزیع f را به پتانسیل گرانشی و کمیت‌های رصدی مربوط می‌کنند ایفا می‌کند. یک صفحه‌ی $x - v_x$ درون یک فضای فاز ۶- بعدی (x, y, z, v_x, v_y, v_z) در مختصات کارتزنی^{۱۱} در نظر گیرید. یک جعبه مستطیلی در صفحه تصور کنید که از x تا $x + \Delta x$ و v_x تا $v_x + \Delta v_x$ گسترده شده است. می‌توانیم جریان ستاره‌ها را با معادله‌ی پیوستگی نشان دهیم:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(f \frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(f \frac{dz}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial v_x} \left(f \frac{dv_x}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial v_y} \left(f \frac{dv_y}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial v_z} \left(f \frac{dv_z}{dt} \right) = 0 \quad (29.2)$$

این معادله پیوستگی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(f \frac{dx_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial v_i} \left(f \frac{dv_i}{dt} \right) \right) = 0 \quad (30.2)$$

که $x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z, v_1 \equiv v_x, v_2 \equiv v_y, v_3 \equiv v_z$ هستند. گاهی نیز به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(f \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left(f \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = 0 \quad (31.2)$$

در این قرارداد، برای هر بردار $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} \equiv \sum_{i=1}^r \frac{\partial b_i}{\partial a_i} \quad (32.2)$$

همچنین می‌توان بر حسب تکانه $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ که m جرم هر عنصر از گاز است نیز معادله پیوستگی را بازنویسی کرد

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(f \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left(f \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = 0 \quad (33.2)$$

^{۱۱}René Descartes; Latinized: Renatus Cartesius (1569-1650)

۱۲.۲ معادله‌ی بولتزمان غیر برخوردی

۱۲.۲. معادله‌ی بولتزمان غیر برخوردی

۱۳.۲ نظریه پتانسیل گرانشی

۱۳.۲. نظریه پتانسیل گرانشی

نتیجه اصلی گرانش نیوتنی قانون عکس مجذور بین دو جرم نقطه‌ای m_1 و m_2 که در فاصله‌ی $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ است

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r} \quad (34.2)$$

این قانون را می‌توان برای مجموعه‌ای از ذرات نیز استفاده نمود. اگر یک توزیع پیوسته جرمی $\rho(\vec{x})$ داشته باشیم، نیروی در واحد جرم را می‌توان به این شکل نوشت

$$\vec{F}(\vec{x}) = G \int \frac{\vec{x}' - \vec{x}}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' \quad (35.2)$$

با استفاده از رابطه بین نیرو و پتانسیل $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$ پتانسیل گرانشی متناظر برای این نیرو هست

$$\Phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}') d^3\vec{x}'}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \quad (36.2)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی پواسون و استفاده از قضیه دیورژانس، می‌توان قضیه‌ی گاوس را برای توزیع جرم بدست آورد

$$\int \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{S} = 4\pi G \int \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} = 4\pi G M_{enc} \quad (37.2)$$

انرژی پتانسیل یک سیستم کار انجام شده بر خلاف نیروی گرانش در یک توزیع جرمی تعریف می‌شود. محاسبه‌ی کل کار انجام شده با بررسی تغییر در پتانسیل گرانشی $\delta\Phi(\vec{x})$ ، به واسطه یک تغییر در چگالی $\delta\rho(\vec{x})$ ادامه می‌یابد. بعد از انتگرال‌گیری جزء به جزء و استفاده از قضیه دیورژانس بدست می‌آوریم

$$W = -\frac{1}{4\pi G} \int |\nabla\Phi(\vec{x})|^2 d^3\vec{x} = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x})\Phi(\vec{x}) d^3\vec{x} \quad (38.2)$$

که علامت منفی نماینده‌ی کار منفی انجام شده در طی تشکیل توزیع جرم است.

اگرچه این نتایج کاملاً کلی هستند، اما در عمل این انتگرال‌ها تنها برای چند مورد خاص به صورت تحلیلی قابل حل هستند. یکی از مهم‌ترین نتایج ساده کننده از تقارن کروی و دو قضیه نیوتن حاصل می‌شود:

- جسمی درون یک پوسته کروی با چگالی یکنواخت هیچ نیروی گرانشی خالصی از سمت پوسته دریافت نمی‌کند.
- نیروی گرانشی اعمال شده بر یک جسم خارج از پوسته مانند حالتی است که کل جرم پوسته درون مرکز آن متمرکز شده باشد.

برای تقارن کروی، پتانسیل می‌تواند به دو بخش تقسیم شود، بخشی که توسط جرم داخلی ایجاد شده و بخشی از جرم که خارج از شعاع r قرار دارد:

$$\Phi(r) = -4\pi G \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'}_{\text{داخلی}} + \underbrace{\int_r^\infty \rho(r') r' dr'}_{\text{خارجی}} \right] \quad (39.2)$$

برای تقارن کروی رابطه بین سرعت مداری دایره‌ای و پتانسیل هست

$$v_e^2(r) = r \frac{d\Phi}{dr} \quad (40.2)$$

سرعت فرار یک ذره به عنوان سرعتی که در آن ذره انرژی کل مثبت دارد تعریف می‌شود و در این سرعت ذره مقید به سیستم نیست. برای تقارن کروی، سرعت فرار v_e فقط تابعی از شعاع است

$$v_e^2(r) = -2\Phi(r) \quad (41.2)$$

که طبق قرارداد در بی‌نهایت پتانسیل صفر است $\Phi(\infty) \rightarrow 0$. قضیه ویریال نتیجه دیگری برای رابطه بین انرژی جنبشی و کار انجام شده توسط گرانش که روی یک مدار کامل متوسط‌گیری شده بدست می‌دهد:

$$\langle v^2 \rangle_{\text{orbit}} = \langle \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \Phi \rangle_{\text{orbit}} \quad (42.2)$$

۱.۱۳.۲ مدارهای ستاره‌ای و جفت‌های چگالی - پتانسیل

اولین گام برای ساختن یک مدل کهکشانی، گزینش یک پتانسیل گرانشی است. چون معمولاً مشتق‌گیری ساده‌تر از انتگرال‌گیری است، طبق معادله‌ی پواسون، توزیع چگالی را از پتانسیل گرانشی استخراج می‌کنیم. روش‌های مختلفی برای جمعیت‌دار کردن مدارهای ستاره‌ای در یک کهکشان وجود دارد (شکل ۱.۱۳.۲). یک توصیف کامل از کهکشان، نه تنها مستلزم یک توزیع چگالی فیزیکی است بلکه یک چگالی فضای فاز را نیز نیاز دارد.

جفت‌های چگالی - پتانسیل برای مقاصد مختلف مناسب هستند. برخی از جهت سادگی یا برخی تقارن‌ها برتری دارند. بعضی دیگر اجازه می‌دهند که چگالی فضای فاز را به شکل بسته‌تری بنویسیم که تنها تابعی از تعداد محدودی متغیر باشد: $f = f(E)$, $f = f(E, L^2)$, $f = f(E, L_z)$. برخی دیگر ویژگی تولید مدارهای خود-متشابه را دارند، یعنی یک مدار در هر شعاعی اگر با یک ضریب دلخواهی مقیاس شود، یک مدار مجاز دیگر را تولید کند.

۲.۱۳.۲ پتانسیل‌های کروی

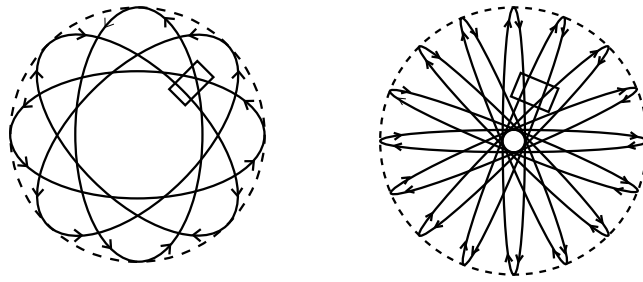
(الف) جرم نقطه‌ای: پتانسیل کپلر با شکل زیر

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (43.2)$$

در این پتانسیل، انرژی جسمی به جرم μ فقط تابعی از نیم محور اصلی مدار بیضوی a است:

$$E(a) = -\frac{GM\mu}{2a} \quad (44.2)$$

(ب) کروی همگن: یک کروی با چگالی ثابت به جرم $M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ مدارهایی درون کره با دوره تناوب ثابت زیر می‌دهد



شکل ۴.۲: نحوه تجمیع مدارها در یک دیسک کهکشانی

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \quad (45.2)$$

چنین رابطه‌ای در اخترفیزیک بسیار متداول است. زمان دینامیکی بطور معمول به صورت $T_{dyn} \propto (G\rho)^{-1/2}$ تغییر می‌کند. پتانسیل خارج از کره‌ی همگن مانند یک جرم نقطه‌ای رفتار می‌کند $\Phi(r) = -GM/r$ ، اما برای فواصل $r < R$ داریم

$$\Phi(r) = -2\pi G\rho \left(R^2 - \frac{r^2}{3} \right) \quad (46.2)$$

ج (هم‌زمان):^{۱۲}

این پتانسیل دارای این ویژگی جالب است که دوره تناوب مداری تنها تابعی از انرژی مدار است. به یاد داریم که پتانسیل کپلری هم چنین تبهگنی را داشت و انرژی تابعی از طول نیم محور اصلی بود. پتانسیل یک‌زمان به این صورت است

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}} \quad (47.2)$$

که چگالی مرکزی به این صورت دارد

$$\rho_0 = \frac{3M}{16\pi b^2} \quad (48.2)$$

۱۴.۲ کهکشان راه شیری

^{۱۲} Isochrone